



## ВИЩА МАТЕМАТИКА 3. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

### Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

#### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>13 Механічна інженерія</i>
Спеціальність	<i>136 Металургія</i>
Освітня програма	<i>Комп'ютеризовані процеси лиття</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна) (дистанційна/змішана)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, осінній семестр</i> <i>Вища математика 1. Диференціальне числення та лінійна алгебра</i> <i>1 курс, весняний семестр</i> <i>Вища математика 2. Інтегральне числення та диференціальні рівняння</i> <i>2 курс, осінній семестр</i> <i>Вища математика 3. Теорія ймовірностей</i>
Обсяг дисципліни	<i>15,5 кредитів/465 годин:</i> <i>Частина 1: 7 кредити/210 годин: лекції – 54 год; практичні заняття 72 год; СРС – 84 год;</i> <i>Частина 2: 4,5 кредитів/135 годин: лекції – 36 год; практичні заняття – 54 год; СРС – 45 год;</i> <i>Частина 3: 4,0 кредити/120 години: лекції – 36 год; практичні заняття – 54 год; СРС – 30 год</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Частина 1: Екзамен/РР, МКР</i> <i>Частина 2: Екзамен/РР, МКР</i> <i>Частина 3: Екзамен/РР, МКР</i>
Розклад занять	<i>htth:roz.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: Бейко Іван Васильович, професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор техн. наук, ivan.beyko@gmail.com Практичні / Семінарські: Василенко Наталія Анатоліївна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук. vasylenkonnn@gmail.com
Розміщення курсу	<i>Campus</i>

#### Програма навчальної дисципліни

##### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Не зважаючи на те, що математика зародилась на світанку розвитку цивілізації і є фундаментальною наукою, що вивчає поняття, одержані шляхом абстракції явищ реального світу, вона постійно розвивається і оновлюється. Таким оновленням свого часу стало відкриття диференціального і інтегрального числення, що дало поштовх до формування нового розділу

математики, до якої увійшли теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, аналітична та диференційна геометрія тощо. Сьогодні вища математика є ефективним інструментарієм досліджень у природничих і технічних науках, який забезпечує їх неперервний розвиток. У технічних університетах викладання дисципліни Вища математика є обов'язковим, так як спонукає студентів до розвитку їх інтелекту і здатності до логічного мислення, розв'язання складних спеціалізованих задач та практичних проблем професійної діяльності у новітніх технологіях та комп'ютерному дизайні матеріалів, вміння використовувати методи математичного аналізу та диференціальних рівнянь в інженерних розрахунках.

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів інтегральної компетентності — здатності до логічного мислення, формування особистості студентів; розвиток їх інтелекту і здібностей; здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми

**Предметом** вивчення дисципліни є теорія функцій комплексного змінного, операційне числення, теорія ймовірностей та статистика та застосування теорії функцій комплексного змінного та операційного числення до фізичних задач та задач які приводять до рівнянь математичної фізики, диференціальних рівнянь основних типів та прикладних задач з спеціалізацією.

**Метою** дисципліни Вища математика є формування у студентів таких **програмних загальних компетентностей** як:

ЗК.12 Здатність генерувати нові ідеї (креативність)

ЗК.3 Здатність самостійно вчитися та оволодівати сучасними знаннями

ЗК.13 Здатність приймати обґрунтовані рішення

ЗК.14 Здатність планувати та управляти часом

**В результаті навчання** студент повинен вміти знаходити функцію за її дійсною чи уявною яка є гармонічною функцією, застосовувати інтегральну теорему Коші, та інтегральну формулу Коші, розкласти функцію у ряд Лорана, знаходити лишки, застосовувати лишки до обчислення різних типів інтегралів, невласні інтеграли першого. Уміти знаходити розв'язки диференціальних рівнянь з розривною правою частиною за допомогою операційного числення, вміти розв'язувати інтегральні рівняння, знати основні формули теорії ймовірностей, центральні граничні теореми, вміти застосовувати статистичні методи до аналізу експериментальних даних .

**Програмні результати навчання**

ПР 02 Концептуальні знання і розуміння фундаментальних наук, що лежать в основі відповідної спеціалізації металургія, на рівні, необхідному для досягнення інших результатів освітньої програми.

ПР 06 Вміння обирати і застосовувати придатні типові методи досліджень (аналітичні, розрахункові, моделювання, експериментальні); правильно інтерпретувати результати таких досліджень та робити висновки.

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

Дисципліна «Вища математика» частина 3. викладається на базі частини 1 та частини 2. та повної середньої або середньої професійної освіти.

Є основою для вивчення нормативних дисциплін циклу загальної і професійної підготовки. Знання отримані під час вивчення дисципліни можуть бути використані для розрахунків у курсових та дипломних роботах та проектах. Дисципліна є складовою формування інтегральної компетентності першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

### **3. Зміст навчальної дисципліни**

#### **Розділ 1. Теорія функцій комплексного змінного.**

Тема 1.1. Функції комплексного змінного.

Тема 1.2. Комплексні інтеграли, та ряди, лишки та їх застосування.

#### **Розділ 2. Операційне числення**

Тема 2.1. Перетворення Лапласа. Застосування до рівнянь з частинними похідними.

Тема 2.2. Перетворення Фур'є.

#### **Розділ 3. Теорія ймовірностей та математична статистика.**

Тема 3.1. Обчислення імовірності подій, основні формули

Тема 3.2. Центральні граничні теореми.

Тема 3.3. Елементи статистики.

### **Основна література**

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб./ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика 2-е издание, переработанное и дополненное. К., Вища школа, 1988 г. 440 с.
3. Мартыненко В.С. Операционное исчисление Киев, Вища школа, 1973.
4. Блудова Т.В., Мартыненко В.С. Теорія функцій комплексної змінної. Київ“просвіта” 2000. – 472с.
5. Медведєв, М. Г. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / М. Г. Медведєв, І. О. Пащенко. - К. : "Ліра-К", 2008. - 536 с.

### **Додаткова література**

1. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М. Мир, 1985.

## **Навчальний контент**

### **1. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)**

#### ***5.1.Лекції (36 годин)***

Лекція 1.

Елементарні аналітичні функції, диференційовність, умови Коші-Рімана.

Лекція 2.

Геометричний зміст модуля та аргумента, поняття про конформне відображення.

Лекція 3.

Інтегрування по комплексному змінному, теорема Коші.

Лекція 5.

Інтегральна формула Коші, наслідки з неї.

Лекція 6.

Ряд Тейлора, Ряд Лорана, розвинення в ряд Лорана.

Лекція 7.

Перетворення Лапласа, означення, основні властивості.

Лекція 8.

Образи елементарних функцій, властивості образу.

Лекція 9.

Основні теореми про перетворення Лапласа.

Лекція 10.

Теореми про існування оригіналу та знаходження оригіналу.

Лекція 11.

Застосування перетворення Лапласа до диференціальних рівнянь.

Лекція 12.

Застосування перетворення Лапласа до інтегральних рівнянь.

Лекція 13.

Застосування операційного числення до рівняння математичної фізики..

Лекція 14.

Простір елементарних подій, алгебра подій, класичне визначення ймовірності операції над подіями .

Лекція 15.

Формула повної ймовірності, ймовірність гіпотез .

Лекція 16.

Послідовність незалежних експериментів, схема Бернуллі та Пуассона, випадкові величини, функція розподілу, густина розподілу .

Лекція 17.

Моменти випадкової величини, математичне сподівання, дисперсія. Нормальний закон розподілу, характеристики нормального закону.

Лекція 18.

Елементи математичної статистики.

## **5.2 Практичні заняття (54 годин)**

Заняття 1.

Комплексні числа операції над ними. Геометричний зміст похідної.

Заняття 2.

Перевірка умов Коші-Рімана, Гармонічна функція та знаходження спряженої.

Заняття 3.

Обчислення комплексних інтегралів, застосування інтегральної теореми Коші.

Заняття 4.

Інтегральна формула Коші застосування .

Заняття 5.

Ряди Лорана, розклад у ряд Лорана, полюси порядку полюсів.

Заняття 6.

Обчислення невластивих інтегралів за допомогою лишків.

Заняття 7.

Обчислення інтегралів по замкнутому контуру.

Заняття 8.

Обчислення інтегралів за допомогою лишків, експрес контрольна.

Заняття 9.

Знаходження образів функцій при перетворенні Лапласа .

Заняття 10.

Функція Хевісайда та застосування її до запису розривних функцій.

Заняття 11.

Знаходження образу основних функцій.

Заняття 12.

Знаходження згортки функцій, застосування згортки.

Заняття 13.

Знаходження оригіналу через розклад на елементарні дроби.

Заняття 14.

Диференціювання оригіналу та знаходження образу диференціального виразу.

Заняття 15.

Знаходження оригіналу за допомогою перетворень.

Заняття 16.

Знаходження розв'язків диференціальних рівнянь.

Заняття 17.

Знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь.

Заняття 18.

Знаходження розв'язків інтегральних рівнянь за допомогою лишків.

Заняття 19.

Знаходження розв'язків систем диференціальних рівнянь, експрес контрольна.

Заняття 20.

Випадкові події операції над подіями, класичне означення ймовірності та геометричне.

Заняття 21.

Знаходження ймовірності методами комбінаторики.

Заняття 22.

Формула повної ймовірності застосування до прикладів.

Заняття 23.

Формула Баєса та її застосування.

Заняття 24.

Біноміальний закон розподілу та розподіл Пуассона.

Заняття 25.

Знаходження моментів випадкових величин.

Заняття 26.

Нормальний закон розподілу та інші, знаходження математичного сподівання та дисперсії.

Заняття 27.

Модульна контрольна робота.

## **6. Самостійна робота студента**

Самостійна робота студентів (загальна тривалість 48 годин) полягає у:

Самостійному опрацюванні лекційного матеріалу (в розрахунку 0,12 година на 1 годину лекційних занять) – всього 4 годин

Підготовці до практичних робіт – всього 5 годин

Підготовці до МКР - всього 3 годин

Виконанні розрахункової роботи – всього 6 годин

Підготовці до семестрового контролю – екзамену – 30 годин. Види самостійної роботи – опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв’язок задач, виконання розрахункової роботи (розбивається на дві частини відповідно до семестрових планових атестацій).

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3)  
Співпраця студентів у розв’язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності. У звичайному режимі роботи лекції та практичні заняття проводяться в аудиторіях. У змішаному режимі лекції та практичні заняття проводяться через платформи дистанційного навчання Сікорський, Meet, Zoom тощо.

### 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

**Поточний контроль:** експрес-опитування, опитування за темою заняття, написання МКР, виконання РР.

**Календарний контроль:** провадиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

**Семестровий контроль:** екзамен

#### Рейтингова система оцінювання

Поточний та підсумковий (стартовий) індивідуальний рейтинги студента ( $R_c$ ) визначаються на основі 50-бальної шкали оцінювання за формулою:

$$R_c = R_{\text{пр}} + R_{\text{ккр}} + R_{\text{мкр}} + R_{\text{ргр}}$$

#### 1. Критерій нарахування балів

##### 1.1. Робота на практичних заняттях

- активна творча робота – 1,3 бали;
- плідна робота – 1 бал;
- пасивна робота – 0 балів.

##### 1.2. Виконання розрахункової роботи

- творче виконання робіт – 25 балів;
- роботу виконано з незначними недоліками – 20 балів;
- роботу виконано з певними помилками – 15 балів;
- роботу не зараховано (завдання не виконане або є грубі помилки) – 0 балів.

##### 1.3. Експрес контроль по 1 балу;

##### 1.4. Модульна контрольна робота 5 балів.

- Умови позитивної першого календарного контролю є розв’язання не менше 50 % експрес контролю. Умовою позитивного другого календарного контролю є розв’язане не менше 50 % експрес контролю.
- Умовою допуску до екзамену є семестровий рейтинг не менше 60 %.
- Екзаменаційний білет складається з 2 теоретичних та 3 практичних завдань, на підготовку відводиться 2 години, екзамен проводиться у змішаній формі.

- «відмінно», повна відповідь, не менше 90% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь», (повне, безпомилкове розв’язування завдання);
- «добре», достатньо повна відповідь, не менше 75% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь або є незначні неточності (повне розв’язування завдання з незначними неточностями);
- «задовільно», не повна відповідь, не менше 50% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до «стереотипного» рівня та деякі помилки (завдання виконане з певними недоліками);
- «незадовільно», відповідь не відповідає умовам до «задовільно» – 0 балів.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

## **9. додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)**

- Питання, що виносяться на модульну контрольну роботу (або на тематичні контрольні роботи) наведено у Додатку А;
- Приклад завдання для розрахункової роботи наведено у Додатку Б;
- Питання, що виносяться на екзамен і приклад екзаменаційного білету наведено у Додатку В.

### **Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** доктор фіз.-мат. наук, професор, Горбачук Володимир Мирославович

**Ухвалено** кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь (протокол № 11 від 22 червня 2023 р.)

**Погоджено** Методичною комісією НН ІМЗ ім. Є. О. Патона (протокол № 12/23 від 28 червня 2023 р.)

**На модульну контрольну виносяться завдання з таких тем :**

Тема 1.1. Функції комплексного змінного.

Тема 1.2. Комплексні інтеграли, та ряди, лишки та їх застосування.

Тема 2.1. Перетворення Лапласа. Застосування до рівнянь з частинними похідними.

Тема 3.1. Обчислення імовірності подій, основні формули

Тема 3.2. Центральні граничні теореми.



## Приклад завдання для розрахункової роботи

1. Знайти
- $f(z)$
- , якщо

$$u = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0$$

2. Обчислити інтеграл :

$$\int_{AB} z^3 dz, \quad AB : x = y^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$$

3. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл :

$$\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{z(z+4)}$$

4. Розкласти в ряд Лорана в околі точки
- $z_0$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = 2$$

5. Обчислити за допомогою лишків :

$$\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

6. Обчислити за допомогою лишків :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sqrt{3} \sin x}$$

7. Обчислити за допомогою лишків :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$$

8. Знайти оригінал функції :

$$\frac{5p^2 - 5p + 8}{(p+3)(p^2 - 4p + 13)}$$

9. Розв'язати задачу Коші за допомогою операційного числення :

$$x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}, x(0) = 2, x'(0) = 6$$

10. Знайти розв'язки системи :

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2$$

11. Нехай  $A, B, C$  – три довільні події. Знайти вираз для події,  
Що відбудеться хоча одна подія.
12. Кожна буква слова “математика” написана на окремій карточці,  
карточки перемішують а потім виймають по одній. Яка імовірність,  
отримати слово “тема”?
13. На конвеєр попадають деталі з трьох автоматів. Відомо, що перший автомат дає 0,3 % браку  
другий 0,2 %, третій 0,1 %. З конвеєра наугад взята деталь, знайти імовірність, що вона  
бракована, якщо з першого автомата на конвеєр попало 1000, з другого 2000, з третього 3000.
14. Величина розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 10,  
середньоквадратичним відхиленням 4. Знайти імовірність попадання випадкової величини у  
інтервал  $[2; 13]$ .
15. Випадкова величина задана рядом розподілу

$x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_i$	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1

знайти математичне сподівання та дисперсію.

## Питання, що виносяться на семестровий контроль:

1. Комплексні числа операції над ними, геометрична інтерпретація комплексних чисел, алгебраїчна і тригонометрична форма комплексного числа, переведення з одної форми в іншу.
2. Добування кореня n-го степеня з комплексного числа.
3. Границя послідовності, границя функції, поняття функції комплексного змінного, приклади.
4. Диференційовність функції комплексного змінного, умови Коші-Рімана.
5. Інтеграл від функції комплексного змінного визначення властивості, обчислення.
6. Інтегральна теорема Коші для однозв'язної та багатозв'язної області.
7. Інтегральна формула Коші, узагальнена формула.
8. Принцип максимуму модуля для аналітичних функцій.
9. Числові ряди над комплексними числами, ознаки збіжності цих рядів.
10. Функціональні ряди, рівномірна збіжність ряду.
11. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневого ряду, знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.
12. Теорема Абеля.
13. Ряд Тейлора, розклад елементарних функцій в ряд Тейлора.
14. Теорема єдиності аналітичної функції.
15. Розклад функції в ряд Лорана, теорема про розклад функції в ряд Лорана.
16. Особливі точки функцій їх класифікація.
17. Лишок функції, формули обчислення лишків відносно полюсів.
18. Основна теорема про лишки.
19. Лишок відносно нескінченно далекої точки, його обчислення.
20. Обчислення за допомогою лишків  $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ .
21. Обчислення за допомогою лишків  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .
22. Обчислення інтегралу  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ , лема Жордана.
23. Означення оригіналу при перетворенні Лапласа, теорема про аналітичність образу (з доведенням).
24. Необхідна умова, щоб функція була образом. (з доведенням)
25. Образ функції  $\eta(t)$ , гамма функція її властивості. (з доведенням)
26. Образ функції  $t^s$  при перетворенні Лапласа. (з доведенням)
27. Лінійність та подібність при перетворенні Лапласа (з доведенням).
28. Теорема запізнення (з доведенням).
29. Теорема упередження (з доведенням).
30. Теорема зміщення (з доведенням).
31. Теорема про диференціювання оригіналу (з доведенням).
32. Теорема про диференціювання образу (з доведенням).
33. Теорема про інтегрування оригіналу (з доведенням).
34. Теорема про інтегрування образу (з доведенням).
35. Згортка функцій, властивості згортки довести, що згортка оригіналів є оригіналом.
36. Теорема Бореля про образ згортки при перетворенні Лапласа (з доведенням).
37. Перетворення Фур'є пряме та обернене.
38. Теорема (формула звернення Рімана-Мелліна) (з доведенням).
39. Знаходження оригіналу по формулі звернення за допомогою лишків.
40. Інтегральні рівняння першого роду типу згортки їх розв'язування.
41. Інтегральні рівняння другого роду їх розв'язування.

42. Інтегро-диференціальне рівняння його розв'язування.
43. Системи диференціальних рівнянь їх розв'язування.
44. Класичне означення імовірності, поле подій, операції над подіями, приклади.
45. Геометричне означення імовірності, приклади.
46. Статистичне означення імовірності, приклади.
47. Умовна імовірність, імовірність від добутку скінченої кількості подій, приклад.
48. Формула повної імовірності, приклад.
49. Формула Бейеса, приклад.
50. Біноміальний закон розподілу основні формули (з доведенням).
51. Ряд розподілу, багатокутник розподілу, функція розподілу.
52. Неперервні випадкові величини, функція розподілу, густина розподілу їх властивості.
53. Характеристики випадкової величини ( математичне сподівання, мода, медіана ).
54. Моменти випадкової величини початкові та центральні, приклади обчислень.
55. Математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення.
56. Закон Пуасона знайти математичне сподівання та дисперсію.
57. Математичне сподівання та дисперсія для Біноміального закону .
58. Нормальний закон розподілу його основні параметри.
59. Моменти нормального закону розподілу.
60. Імовірність попадання випадкової величини розподіленої по нормальному закону в заданий інтервал.
61. Нерівність Чебишова, теорема Чебишова.
62. Теорема Бернуллі.
63. Теорема Лапласа.
64. Проста статистична сукупність, статистична функція розподілу, статистичний ряд, гістограма.
65. Числові характеристики статистичного розподілу, згладження статистичного розподілу.
66. Оцінки невідомих параметрів випадкової величини.
67. Оцінки для математичного сподівання та дисперсії.
68. Довірчі інтервали, довірча імовірність, точні методи знаходження довірчих інтервалів.
69. Оцінки для числових характеристик випадкових величин.
70. Критерій  $\chi^2$  та Колмогорова.

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр  
Напрямок підготовки Матеріалознавство  
Спеціальність 132 Матеріалознавство  
Кредитний модуль Вища математика. Частина 3. Теорія ймовірностей та математична статистика

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1**

1. Образ функції  $\eta(t)$  при перетворенні Лапласа; гамма-функція, її властивості.

---

2. Числові характеристики статистичного розподілу, оцінки моментів розподілу.

3. Задачі

1. Обчислити інтеграл :

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos z dz}{(z+1)(z-2)^2}.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші операційним численням:

$$x' + x = \sin 2t, \quad x(0) = 1$$

3. Для контролю продукції із трьох партій деталей взята для випробування одна деталь. Яка ймовірність, що деталь бракована, якщо в одній партії 2/3 деталей браковані, а в двох інших -

$$\frac{1}{3}$$

бракованих.